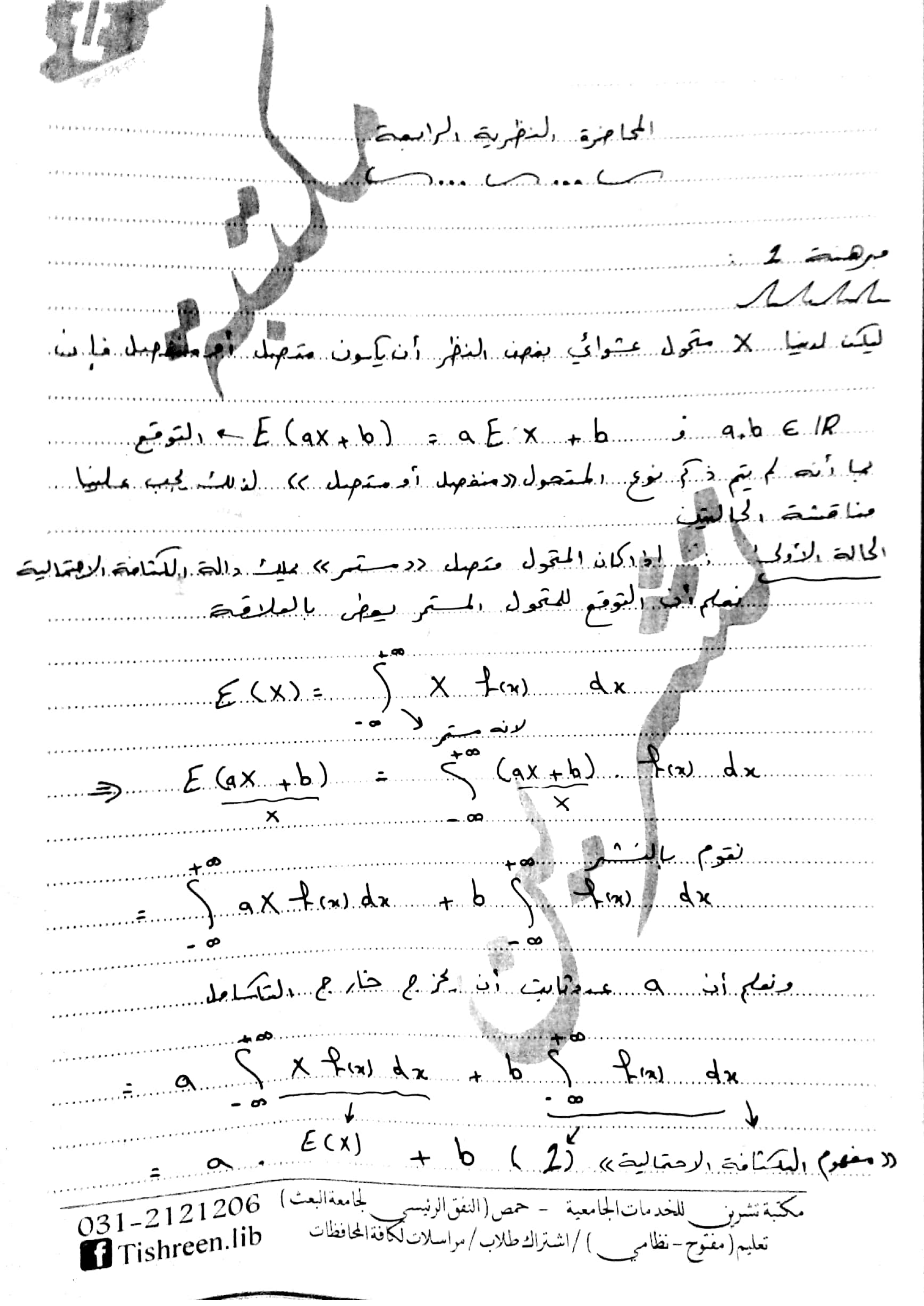


المحاضرة النظرية الرابعة

مبرهنة 2 :

ليكن لدينا X متحول عشوائي بغض النظر أن يكون متصل أو منفصل فإن

التوقع ← $E(aX+b) = aE\,X + b$ و $a, b \in \mathbb{R}$

بما أنه لم يتم ذكر نوع المتحول «منفصل أو متصل» لذلك يجب علينا مناقشة الحالتين

الحالة الأولى : إذا كان المتحول متصل «مستمر» يملك دالة الكثافة الاحتمالية

نعلم أن التوقع للمتحول المستمر يعطى بالعلاقة

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

لأنه مستمر

$$\Rightarrow E(\underbrace{aX+b}_{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\underbrace{ax+b}_{x})\, f(x)\, dx$$

نقوم بالنشر

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ax\, f(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

ونعلم أن a عدد ثابت أن يخرج خارج التكامل

$$= a\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx}_{E(X)} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx}_{1}$$

$= a \cdot E(X) + b\,(1)$ «مفهوم الكثافة الاحتمالية»

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث)
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
031-2121206
Tishreen.lib

Scanned by CamScanner

$= a E(X) + b$

الحالة الثانية: إذا كان المتحول منفصل فهو يملك ... الاحتمالي

$E(X) = \sum_x x F(x)$ المتحول منفصل

$$E(ax+b) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) \cdot F(x)$$

والمجموع هو الجمع على x أي بجميع قيم المتحول X

$$E(ax+b) = \sum ax F(x) + b \sum F(x)$$

$$= a \sum x F(x) + b \sum F(x)$$

ونعلم أن $E(X) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x F(x)$

ولدينا $\sum_{-\infty}^{+\infty} F(x) = 1$ لأن قانون احتمالي مجموعه يساوي الحدث الأكيد

نعوض $= a E(X) + b(1)$

$= a EX + b$

{ نلاحظ من المبرهنة 1 أن توقع العدد الثابت هو نفسه بينما توقع aX فهو مضاعفة التوقع مثال توقع $3X$ أي مضاعفة التوقع ثلاث مرات }

مبرهنة 2 التشتت $Var(ax+b)$

نعلم أن التشتت يعطى بالقانون

$$Var\ x = E X^2 - (EX)^2$$

$$\Rightarrow Var(ax+b) = E(ax+b)^2 - (E(ax+b))^2$$

نثبت ونطبق حسب المبرهنة 1

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner

$(ax+b)^2$ مطابقة تربيعية

$(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$

نعوض

$= E(a^2x^2 + 2abx + b^2) - (a\,EX + b)^2$

$= E(a^2x^2 + 2abX + b^2) - (a^2(EX)^2 + 2ab\,EX + b^2)$

« ونقبل بأن توقع المجموع يساوي مجموع التوقعات »

$= a^2 EX^2 + b^2 + 2ab\,EX - a^2(Ex)^2 - b^2 - 2ab\,EX$

$= a^2 EX^2 - a^2(Ex)^2 = a^2(EX^2 - (EX)^2) = a^2 \, VarX$

« نستنتج من ذلك أن تشتت العدد الثابت = 0 »

مثال تطبيق مباشرة

ليكن لدينا المتحول الثنائي حيث أن

$VarX = n.p.q$ و $E(X) = n.p$

أوجد $E(3X-1)$ و $Var(-\sqrt{2}X + 2018)$

الحل

حسب المبرهنة الأولى

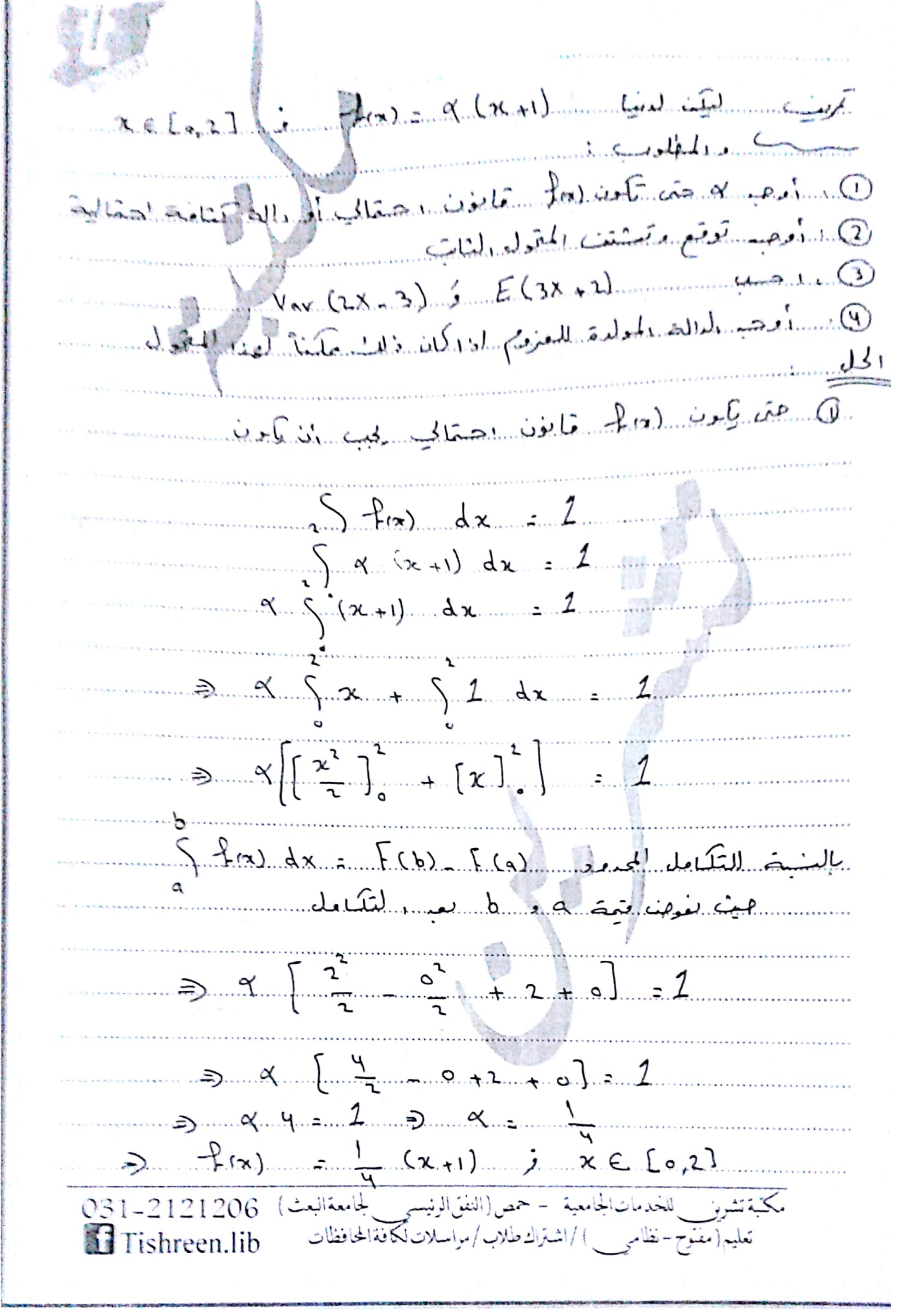
$E(3X-1) = 3EX - 1 = 3n.p - 1$

حسب المبرهنة الثانية

$Var(-\sqrt{2}X + 2018) = (-\sqrt{2})^2 \, VarX$

$= 2\,n.p.q$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib
Scanned by CamScanner



تمرين: ليكن لدينا $f(x) = \alpha(x+1)$; $x \in [0,2]$

والمطلوب:

① أوجد α حتى تكون $f(x)$ قانون احتمالي أو دالة كثافة احتمالية

② أوجد توقع وتشتت المتحول الثابت

③ احسب $E(3X+2)$ و $Var(2X-3)$

④ أوجد الدالة المولدة للعزوم اذا كان ذلك ممكناً لهذا المتحول

الحل:

① حتى يكون $f(x)$ قانون احتمالي يجب أن يكون

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^2 \alpha(x+1)\,dx = 1$$

$$\alpha \int_0^2 (x+1)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \int_0^2 x + \int_0^2 1\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \alpha\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + [x]_0^2\right] = 1$$

بالنسبة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

حيث نعوض قيمة a و b بعد التكامل

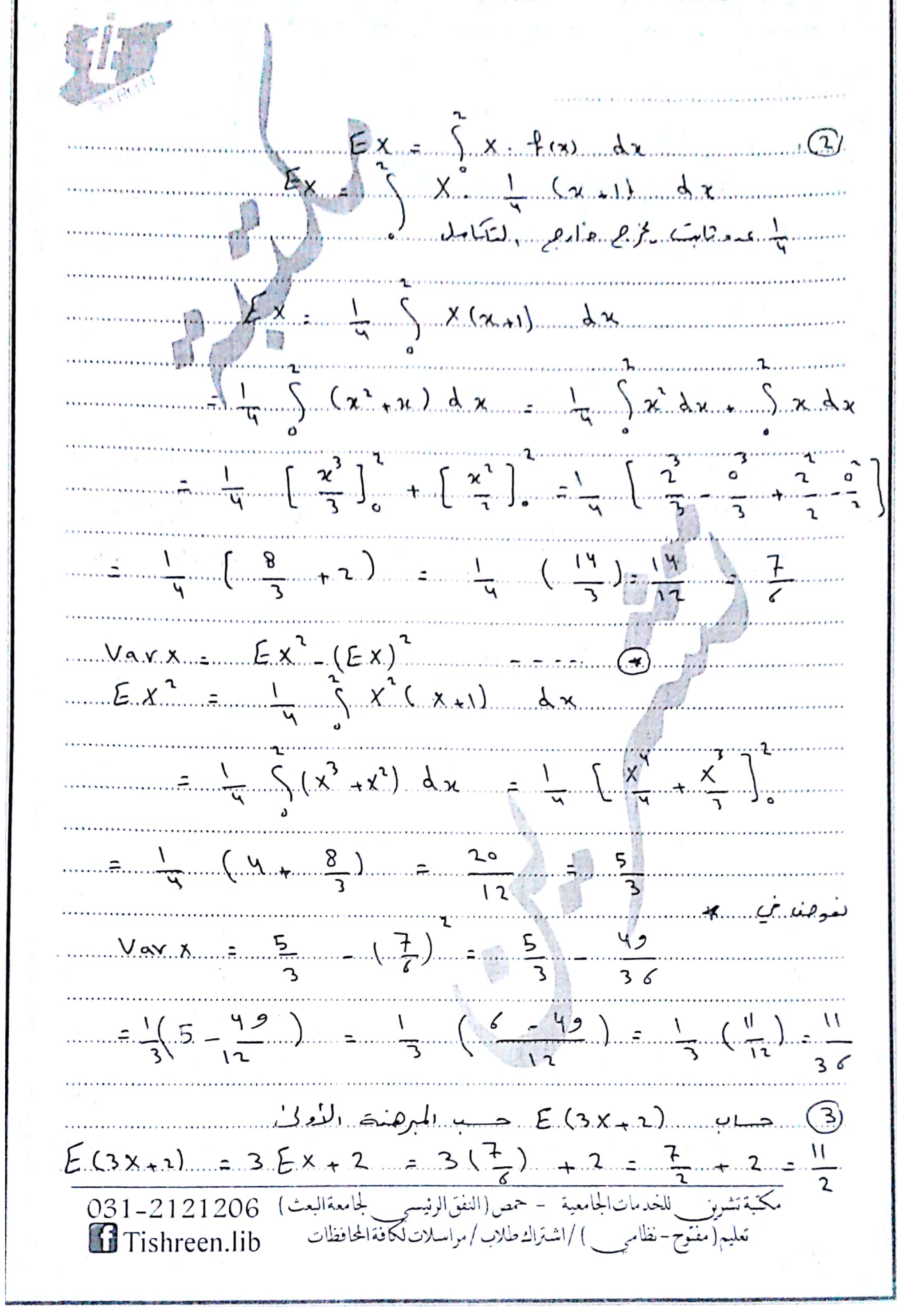
$$\Rightarrow \alpha\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} + 2 + 0\right] = 1$$

$$\Rightarrow \alpha\left[\frac{4}{2} - 0 + 2 + 0\right] = 1$$

$$\Rightarrow \alpha\, 4 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x+1) \;;\; x \in [0,2]$$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib
Scanned by CamScanner



② $EX = \int_0^2 x \cdot f(x)\, dx$

$EX = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4}(x+1)\, dx$

$\frac{1}{4}$ عدد ثابت نخرج خارج التكامل

$EX = \frac{1}{4}\int_0^2 x(x+1)\, dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^2 (x^2+x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^2\, dx + \int_0^2 x\, dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

$Var\,x = Ex^2 - (Ex)^2$ ---- (*)

$Ex^2 = \frac{1}{4}\int_0^2 x^2(x+1)\, dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^2 (x^3+x^2)\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= \frac{1}{4}\left(4 + \frac{8}{3}\right) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

نعوض في *

$Var\,x = \frac{5}{3} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{5}{3} - \frac{49}{36}$

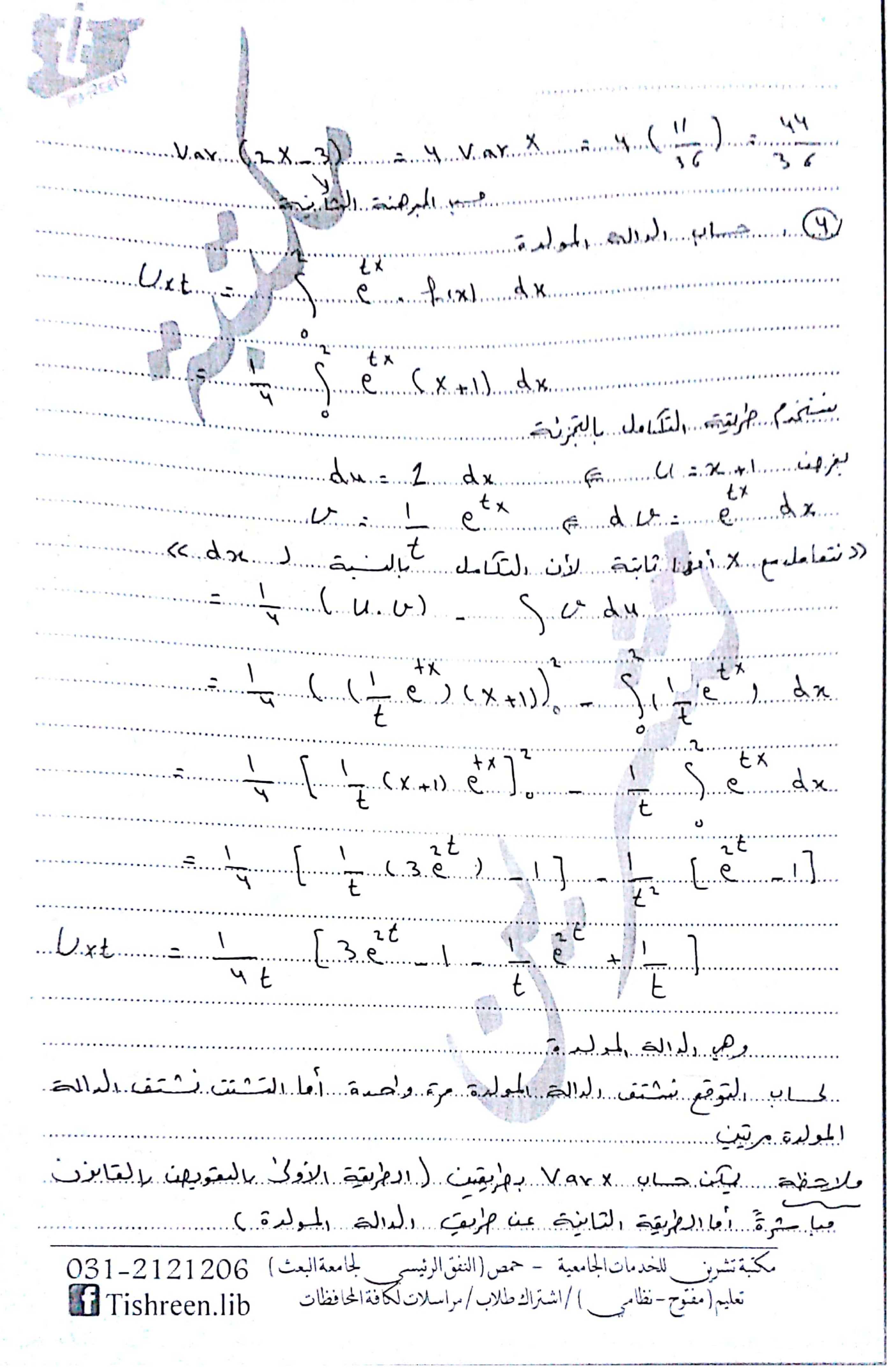
$= \frac{1}{3}\left(5 - \frac{49}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{60-49}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11}{36}$

③ حساب $E(3X+2)$ حسب المبرهنة الأولى

$E(3X+2) = 3EX + 2 = 3\left(\frac{7}{6}\right) + 2 = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner



$$Var(2X-3) = 4\,Var\,X = 4\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{44}{36}$$

حسب المرحلة الثانية

④ حساب الدالة المولدة

$$U_{xt} = \int_0^2 e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 e^{tx}(x+1)\, dx$$

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة

بفرض $u = x+1 \Leftarrow du = 1\, dx$

$dv = e^{tx}\, dx \Leftarrow v = \frac{1}{t} e^{tx}$

«نتعامل مع x أنها ثابتة لأن التكامل بالنسبة لـ dx»

$$= \frac{1}{4}(u \cdot v) - \int v\, du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{t}e^{tx}\right)(x+1)\right)_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{1}{t}e^{tx}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t}(x+1)e^{tx}\right]_0^2 - \frac{1}{t}\int_0^2 e^{tx}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t}(3e^{2t}) - 1\right] - \frac{1}{t^2}\left[e^{2t} - 1\right]$$

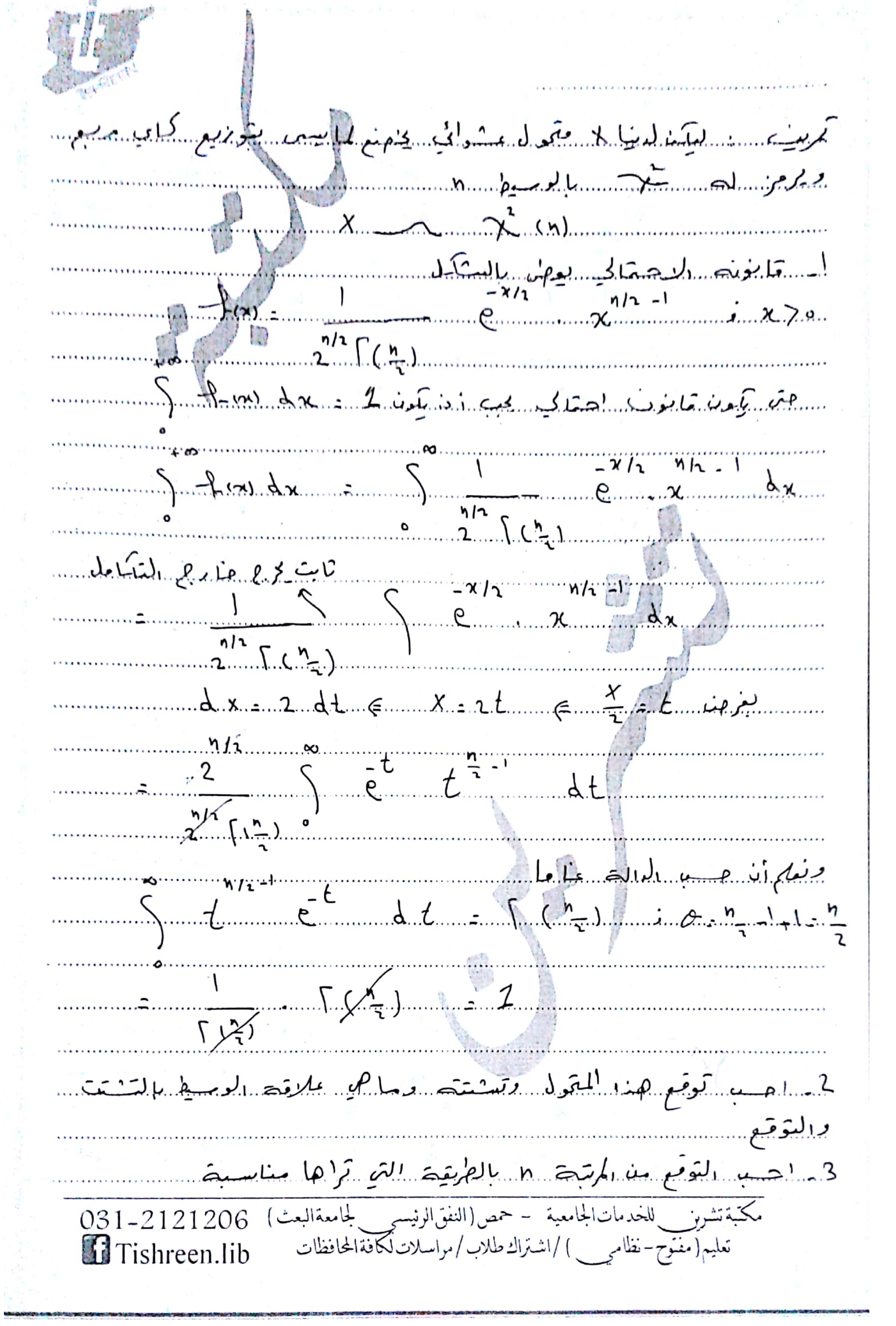
$$U_{xt} = \frac{1}{4t}\left[3e^{2t} - 1 - \frac{1}{t}e^{2t} + \frac{1}{t}\right]$$

وهي الدالة المولدة

لحساب التوقع نشتق الدالة المولدة مرة واحدة أما التشتت نشتق الدالة المولدة مرتين

ملاحظة: يمكن حساب Var x بطريقتين (الطريقة الأولى بالتعويض بالقانون مباشرة أما الطريقة الثانية عن طريق الدالة المولدة)

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib
Scanned by CamScanner



تمرين: ليكن لدينا X متحول عشوائي يخضع لما يسمى بتوزيع كاي مربع ويرمز له χ^2 بالوسيط n

$$X \sim \chi^2(n)$$

1- قانونه الاحتمالي يعطى بالشكل

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-x/2}\, x^{n/2-1} \quad ; \; x>0$$

حتى يكون قانون احتمالي يجب أن يكون $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-x/2} \cdot x^{n/2-1}\, dx$$

ثابت نخرجه خارج التكامل

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int e^{-x/2} \cdot x^{n/2-1}\, dx$$

بفرض $\frac{x}{2} = t \Leftarrow x = 2t \Leftarrow dx = 2\,dt$

$$= \frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, dt$$

ونعلم أن حسب الدالة غاما

$$\int_0^{\infty} t^{n/2-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(\tfrac{n}{2}) \quad ; \; \alpha = \tfrac{n}{2} - 1 + 1 = \tfrac{n}{2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \Gamma(\tfrac{n}{2}) = 1$$

2- احسب توقع هذا المتحول وتشتته وما هي علاقة الوسيط بالتشتت والتوقع

3- احسب التوقع من المرتبة n بالطريقة التي تراها مناسبة

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner

٦ـ توقع الدالة المولدة لهذا الشكل

الحل: ٦ـ

$$E x = \alpha \int_0^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} x \, . \, x^{n/2-1} \, . \, e^{-x/2} \, dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} x^{n/2} \, . \, e^{-x/2} \, dx$$

حيث $\alpha = \dfrac{1}{2^{n/2} \, \Gamma(\frac{n}{2})}$

بفرض $\dfrac{x}{2} = t \Leftarrow dx = 2 \, dt$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} 2^{n/2} \, t^{n/2} \, e^{-t} \, 2 \, dt$$

$$= \frac{1 \times 2^{n/2} . 2}{2^{n/2} \, \Gamma(\frac{n}{2})} \underline{\int_0^{+\infty} t^{n/2} \, . \, e^{-t} \, dt}$$

دالة غاما $\alpha = \frac{n}{2} + 1 \Leftarrow \alpha - 1 = \frac{n}{2}$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \, . \, \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

من خواص الدالة غاما $\Gamma(z+1) = z \, \Gamma(z)$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \, \frac{n}{2} \, . \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2n}{2} = n$$

علاقة الوسيط بالتوقع أي أن التوقع يساوي الوسيط

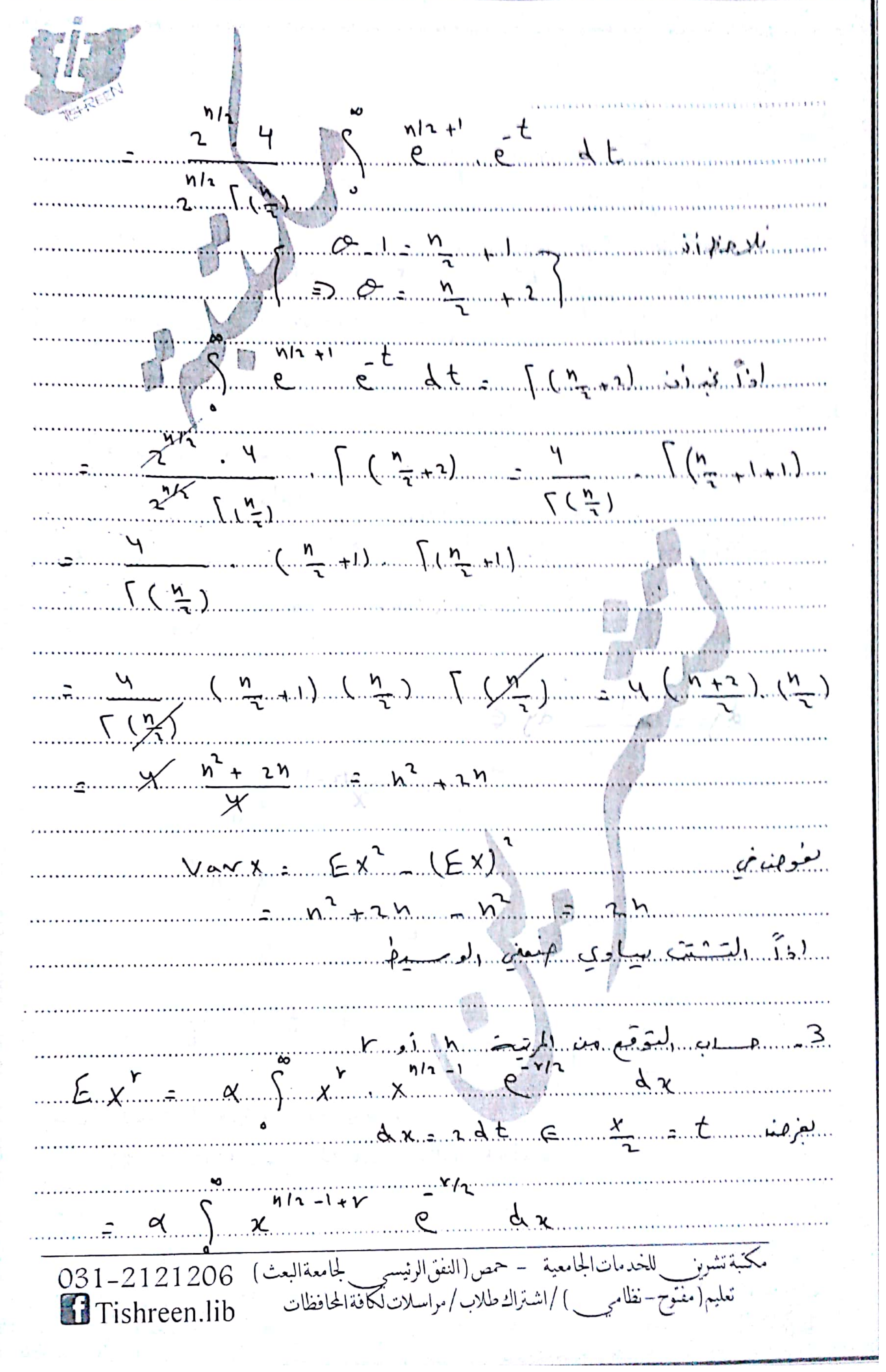
حساب التشتت $E x^2 = \int_0^{\infty} x^2 f(x) \, dx$

$$E x^2 = \alpha \int_0^{\infty} x^{n/2+1} \, e^{-x/2} \, dx$$

بفرض $\dfrac{x}{2} = t \Leftarrow dx = 2 \, dt$

$$\alpha \int_0^{\infty} 2^{n/2+1} \, . \, t^{n/2+1} \, . \, e^{-t} \, . \, 2 \, dt$$

031-2121206 مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي) لجامعة البعث
Tishreen.lib تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Scanned by CamScanner



$$= \frac{2^{n/2} \cdot 4}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty e^{n/2+1} \cdot e^{-t}\, dt$$

نلاحظ أن $\left\{ \alpha - 1 = \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{2} + 2 \right\}$

إذاً نجد أن $\int_0^\infty e^{n/2+1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(\frac{n}{2}+2)$

$$= \frac{2^{n/2} \cdot 4}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \Gamma(\frac{n}{2}+2) = \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \Gamma(\frac{n}{2}+1+1)$$

$$= \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (\frac{n}{2}+1) \cdot \Gamma(\frac{n}{2}+1)$$

$$= \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2}) = 4\left(\frac{n+2}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= 4\, \frac{n^2+2n}{4} = n^2+2n$$

نعوض في $\quad Var\,x = Ex^2 - (Ex)^2$

$$= n^2 + 2n - n^2 = 2n$$

إذاً التشتت يساوي ضعفي الوسيط

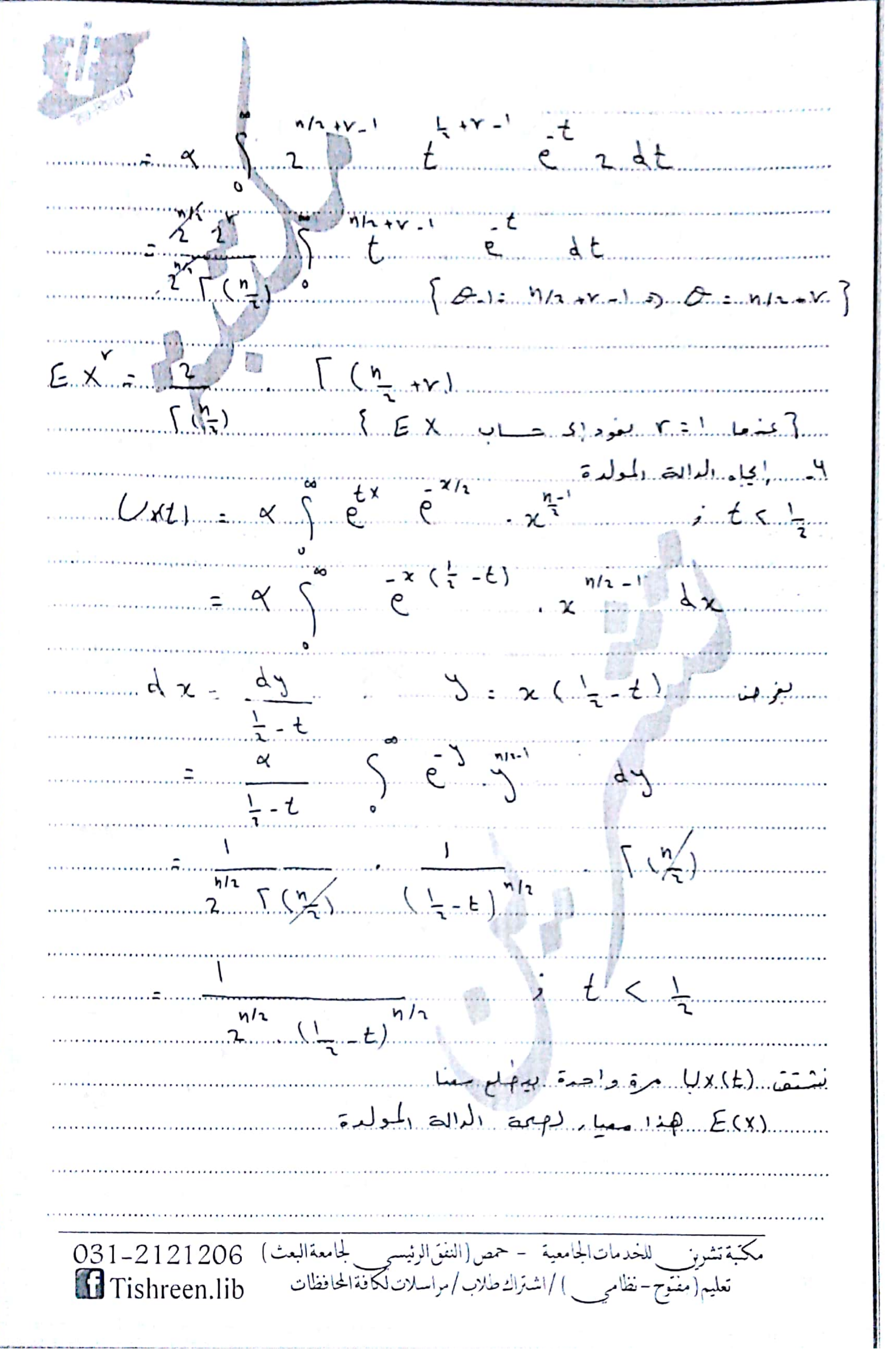
3- حساب التوقع من المرتبة n أو r

$$Ex^r = \alpha \int_0^\infty x^r \cdot x^{n/2-1}\, e^{-x/2}\, dx$$

نفرض $\frac{x}{2} = t \Leftarrow dx = 2\,dt$

$$= \alpha \int_0^\infty x^{n/2-1+r}\, e^{-x/2}\, dx$$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib
Scanned by CamScanner



$= \alpha \int_0^\infty 2^{n/2+r-1}\, t^{\frac{n}{2}+r-1}\, e^{-t}\, 2\, dt$

$= \frac{2^{n/2}\, 2^{r}}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty t^{n/2+r-1}\, e^{-t}\, dt$

$\{\alpha - 1 = n/2 + r - 1 \Rightarrow \alpha = n/2 + r\}$

$E X^r = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma(\frac{n}{2} + r)$

{عندما $r = 1$ نعود لحساب EX}

٤- إيجاد الدالة المولدة

$U_x(t) = \alpha \int_0^\infty e^{tx}\, e^{-x/2}\, x^{\frac{n}{2}-1}$; $t < \frac{1}{2}$

$= \alpha \int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2} - t)}\, x^{n/2-1}\, dx$

بفرض $y = x(\frac{1}{2} - t)$, $dx = \frac{dy}{\frac{1}{2} - t}$

$= \frac{\alpha}{\frac{1}{2} - t} \int_0^\infty e^{-y}\, y^{n/2-1}\, dy$

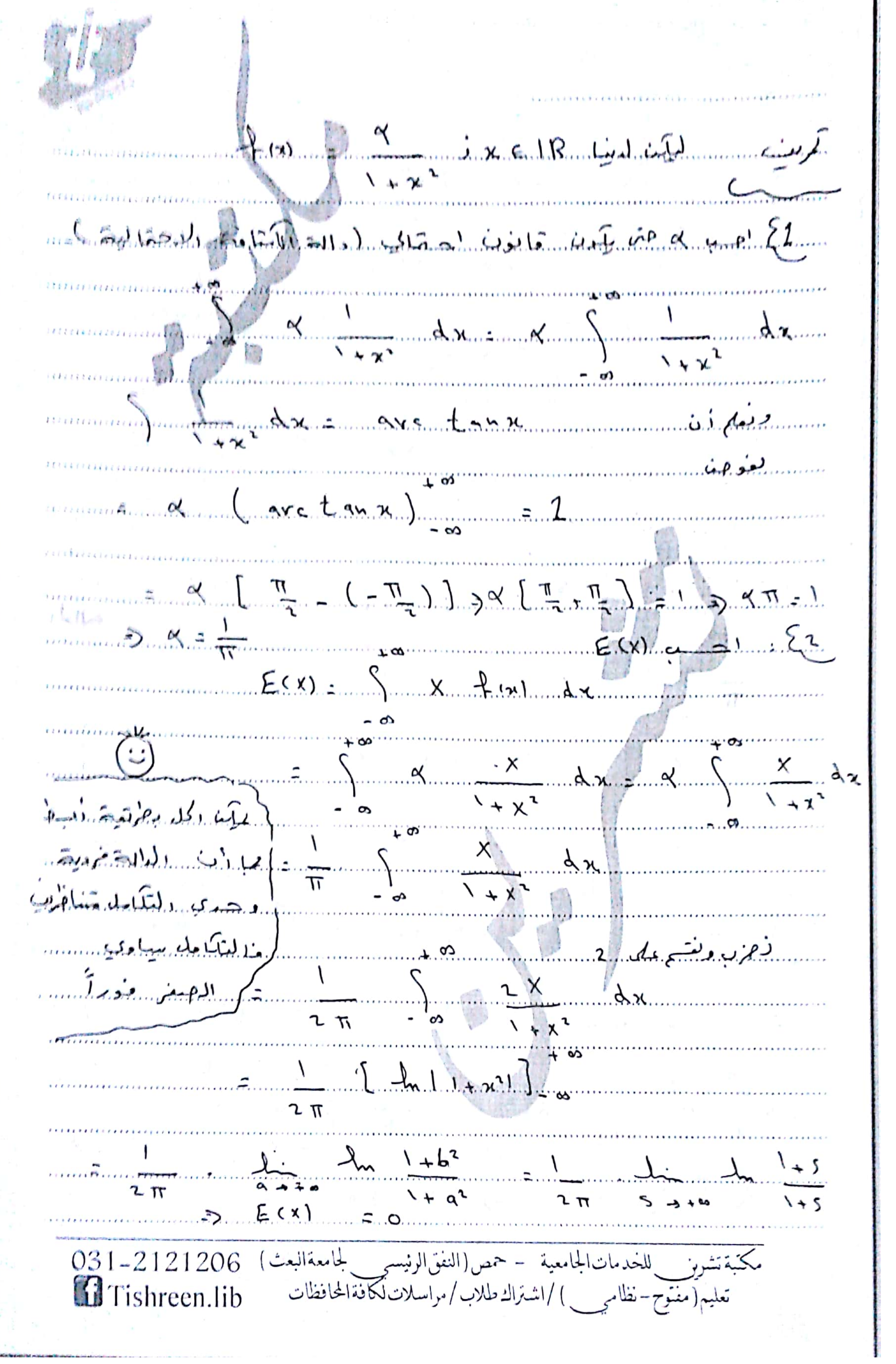
$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} - t)^{n/2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})$

$= \frac{1}{2^{n/2}\,(\frac{1}{2} - t)^{n/2}}$; $t < \frac{1}{2}$

نشتق $U_x(t)$ مرة واحدة يعطينا

هذا معيار لصحة الدالة المولدة $E(x)$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات
Tishreen.lib
Scanned by CamScanner



تمرين: ليكن لدينا $f(x) = \frac{\alpha}{1+x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

1) أوجد α حتى يكون قانون احتمالي (دالة الكثافة الاحتمالية)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \frac{1}{1+x^2}\, dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

ونعلم أن $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$

نعوض

$$\alpha \left(\arctan x\right)_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

$$= \alpha\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow \alpha\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = 1 \Rightarrow \alpha\pi = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\pi}$$

2) احسب $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \frac{x}{1+x^2}\, dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

نضرب ونقسم على 2

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\ln|1+x^2|\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

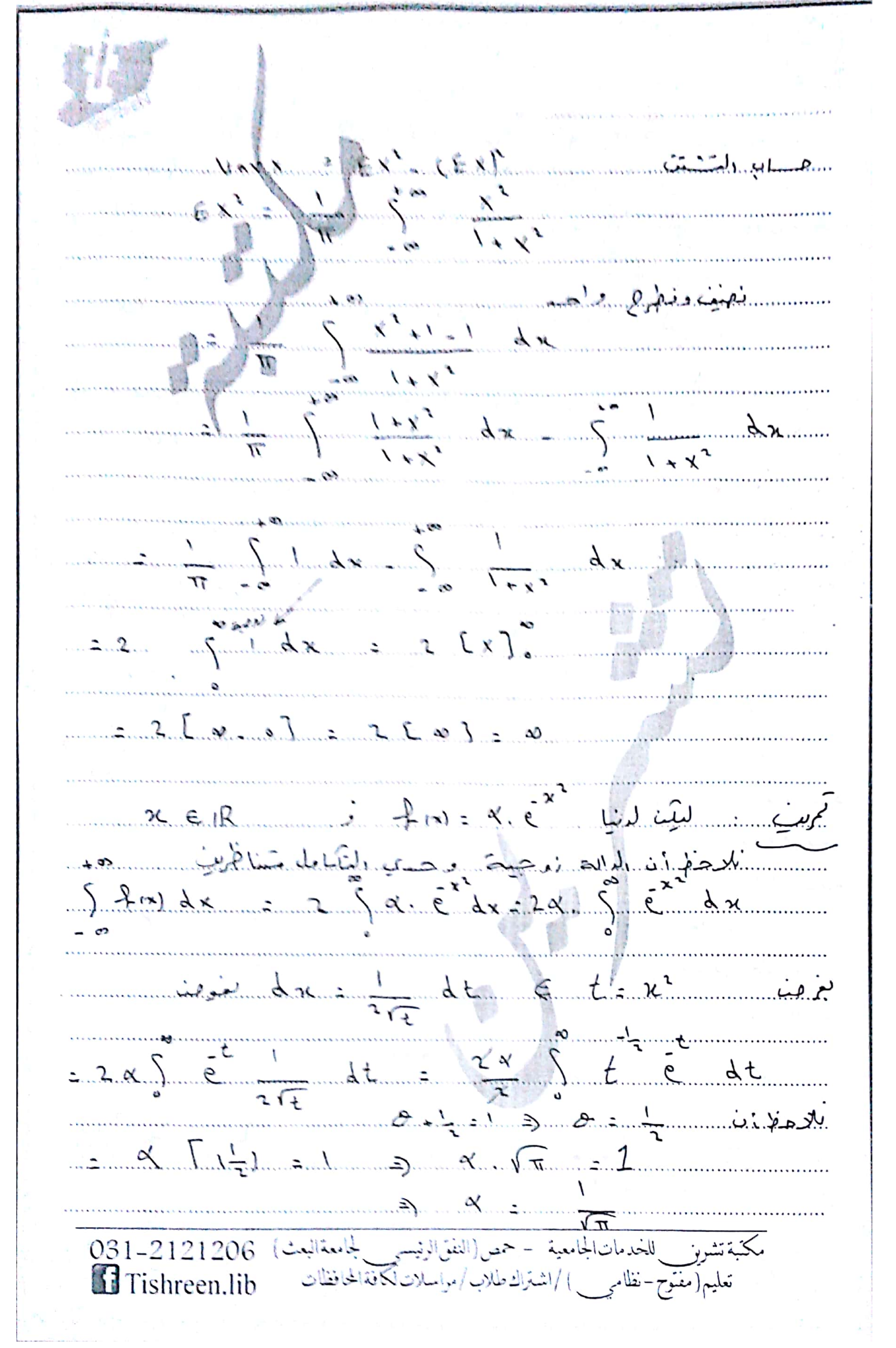
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a\to+\infty} \ln\frac{1+b^2}{1+a^2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{s\to+\infty} \ln\frac{1+s}{1+s}$$

$$\Rightarrow E(X) = 0$$

حلينا الحل بطريقة أخرى
بما أن الدالة فردية
وحدي التكامل متناظرين
فالتكامل يساوي
الصفر فوراً

031-2121206 مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث)
Tishreen.lib تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات

Scanned by CamScanner



حساب التشتت $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}$$

نضيف ونطرح واحد

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} 1\,dx = 2[x]_0^{\infty}$$

$$= 2[\infty - 0] = 2(\infty) = \infty$$

تمرين: ليكن لدينا $f(x) = \alpha\, e^{-x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

نلاحظ أن الدالة زوجية وحدي التكامل متناظرين

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \alpha\, e^{-x^2}\,dx = 2\alpha \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

نفرض $t = x^2$ و $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ نعوض

$$= 2\alpha\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{2\alpha}{2}\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t}\,dt$$

نلاحظ أن: $a + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$= \alpha\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \alpha\,\sqrt{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

مكتبة تشرين للخدمات الجامعية - حمص (النفق الرئيسي لجامعة البعث) 031-2121206
تعليم (مفتوح - نظامي) / اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات Tishreen.lib

Scanned by CamScanner